

# Um tour (não Hamiltoniano) em algoritmos de aproximação e o TSP

---

**Carla Negri Lintzmayer**

`carla.negri@ufabc.edu.br`

<http://professor.ufabc.edu.br/~carla.negri>

Centro de Matemática, Computação e Cognição – Universidade Federal do ABC



# Otimização combinatória

---

Um *problema de otimização* é caracterizado por

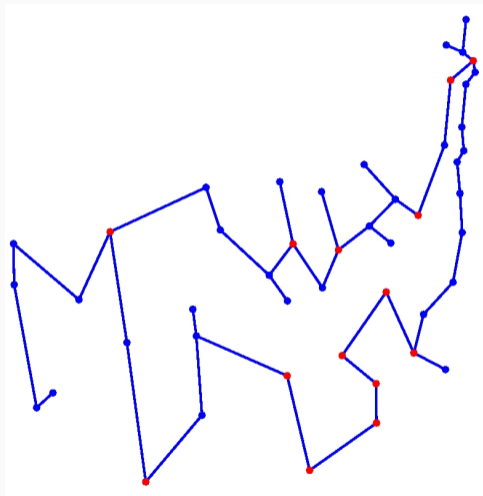
- **entrada**
- **soluções viáveis**
- **custo de uma solução**
- **objetivo**

Um *problema de otimização* é caracterizado por

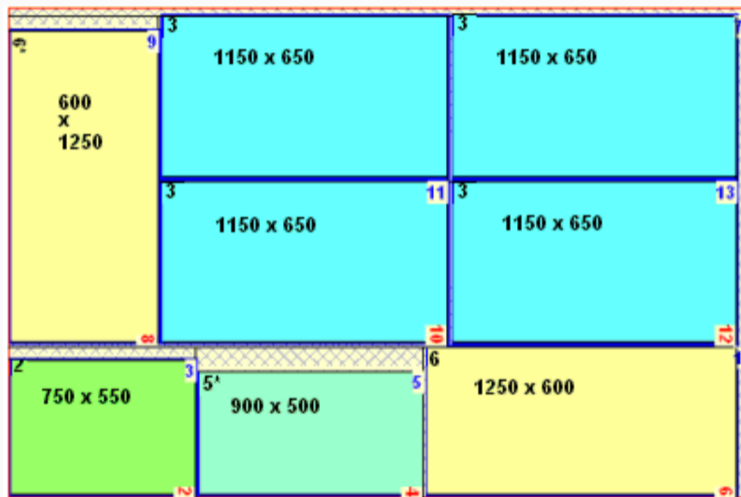
- **entrada**
- **soluções viáveis**
- **custo de uma solução**
- **objetivo**

Em *otimização combinatória*, o conjunto de soluções viáveis é finito (enumerável), porém em geral muito grande.

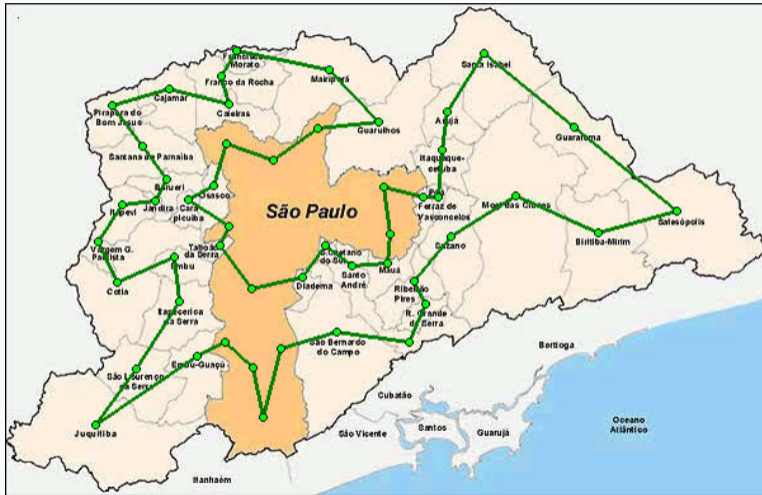
## Exemplo: projeto de redes



## Exemplo: corte



# Exemplo: percursos



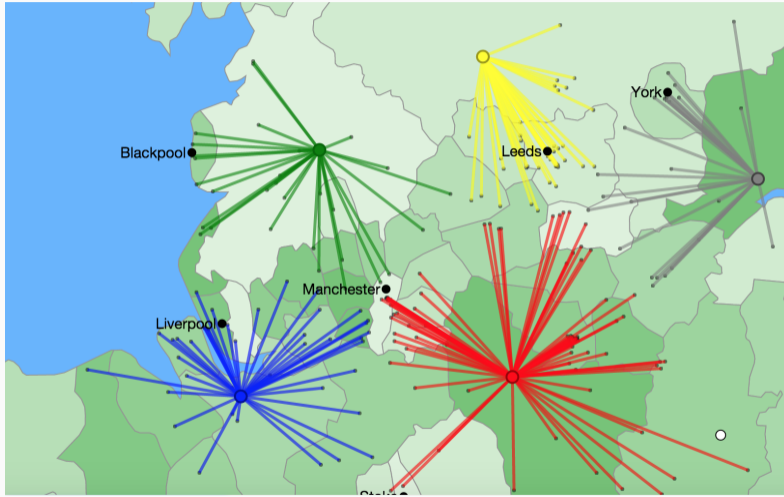
## Exemplo: propagandas

Lorem ipsum per vulputate malesuada ullamcorper viverra sollicitudin risus sapien, torquent turpis metus ultricies rutrum pretium sollicitudin per aliquam, elit dapibus euismod quis mollis odio platea morbi. nam molestie tortor accumsan eros viverra nulla, nibh sodales maecenas sapien felis, mattis libero id fusce porta. consequat nisi semper neque nam tincidunt congue dolor elementum malesuada, netus orci nulla vulputate aenean ante iaculis imperdiet conubia lorem, hendrerit habitasse aliquam quis scelerisque pharetra mauris aliquet. erat a tincidunt vitae tristique hendrerit lacus etiam elit habitasse, pharetra elementum cubilia sapien facilisis egestas curabitur semper, placerat ut rhoncus metus donec inceptos potenti sed. Donec conubia phasellus cubilia luctus curae dictum est quisque at proin nam justo, tempus condimentum morbi mi rutrum pellentesque non pharetra habitant turpis. feugiat sem faucibus donec fringilla maecenas molestie ultricies aenean, imperdiet lacus iaculis vel mi scelerisque venenatis vivamus, porttitor integer etiam molestie porttitor condimentum rhoncus. facilisis placerat nam hendrerit convallis curabitur aenean aliquam aenean, at

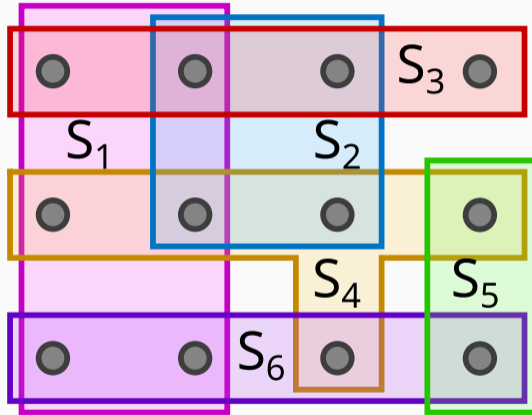




# Exemplo: clusters



# Exemplo: cobertura de conjuntos

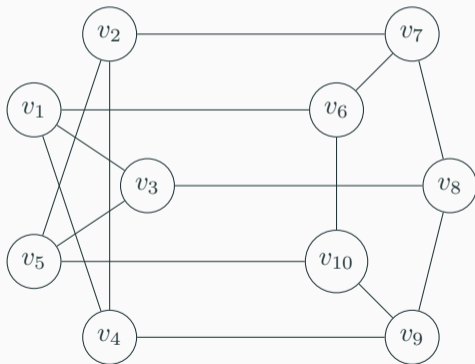


## Conceitos importantes

---

**Grafo** Estrutura que representa relacionamento par-a-par entre objetos.

- Objetos = vértices do grafo
- Relação = arestas do grafo



**Análise de algoritmos** Trata de provar que o algoritmo está correto e estimar o tempo de execução que ele consome sem ter que efetivamente implementá-lo.

O tempo de execução de um algoritmo é escrito em função do tamanho da entrada: número de passos básicos feitos.

**Análise de algoritmos** Trata de provar que o algoritmo está correto e estimar o tempo de execução que ele consome sem ter que efetivamente implementá-lo.

O tempo de execução de um algoritmo é escrito em função do tamanho da entrada: número de passos básicos feitos.

Algoritmo **eficiente** tem tempo de execução descrito por uma função polinomial (como  $n$ ,  $n \log n$ ,  $n^2$ ,  $n^{100}$ , ...).

Bem diferente de algoritmos com tempo exponencial ( $2^n$ ,  $3^{n/2}$ , ...).

**Complexidade** Para a maioria dos problemas de otimização combinatória provavelmente não será possível encontrar algoritmos que

1. encontrem soluções ótimas,
2. em tempo polinomial,
3. para qualquer entrada.

**Complexidade** Para a maioria dos problemas de otimização combinatória provavelmente não será possível encontrar algoritmos que

1. encontrem soluções ótimas,
2. em tempo polinomial,
3. para qualquer entrada.

Porque a maioria deles é **NP-difícil** ou NP-completo.



**Complexidade** Para a maioria dos problemas de otimização combinatória provavelmente não será possível encontrar algoritmos que

1. encontrem soluções ótimas,
2. em tempo polinomial,
3. para qualquer entrada.

Porque a maioria deles é **NP-difícil** ou NP-completo.

Saída: não exigir essas três coisas ao mesmo tempo!

**Abordagens comuns** De forma geral, são por

- algoritmos exatos,
- heurísticas / metaheurísticas,
- algoritmos de aproximação,
- parametrização.

Um algoritmo  $A$  é uma  $\alpha$ -aproximação para um problema de minimização se executa em tempo polinomial e

$$\text{custo}(A(I)) \leq \alpha \text{OPT}(I)$$

para toda instância  $I$ .

Um algoritmo  $A$  é uma  $\alpha$ -aproximação para um problema de minimização se executa em tempo polinomial e

$$\text{custo}(A(I)) \leq \alpha \text{OPT}(I)$$

para toda instância  $I$ .

Note que sempre vale

$$\text{OPT}(I) \leq \text{custo}(A(I))$$

Algumas dificuldades que encontramos:

- Não existe fórmula mágica – cada problema é um problema, apesar de algumas técnicas gerais existirem.

Algumas dificuldades que encontramos:

- Não existe fórmula mágica – cada problema é um problema, apesar de algumas técnicas gerais existirem.
- Encontrar estrutura para poder comparar com o valor da solução ótima

$$\text{custo}(A(I)) \leq X \leq \dots \leq \alpha Z \leq \alpha \text{OPT}(I).$$

Algumas dificuldades que encontramos:

- Não existe fórmula mágica – cada problema é um problema, apesar de algumas técnicas gerais existirem.
- Encontrar estrutura para poder comparar com o valor da solução ótima

$$\text{custo}(A(I)) \leq X \leq \dots \leq \alpha Z \leq \alpha \text{OPT}(I).$$

- Nem todo problema admite um algoritmo de aproximação.

# Problema do Caixeiro Viajante

---



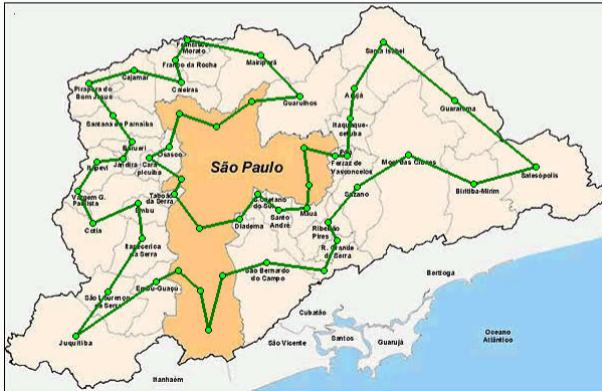
# Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

**Entrada:** Grafo completo  $G$  e função  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Solução viável:** ciclo Hamiltoniano em  $G$ .

**Função objetivo:** soma dos custos das arestas do ciclo.

**Objetivo:** minimização.



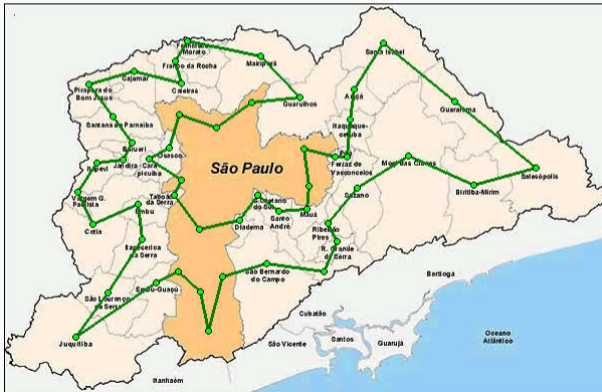
# Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

**Entrada:** Grafo completo  $G$  e função  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Solução viável:** ciclo Hamiltoniano em  $G$ .

**Função objetivo:** soma dos custos das arestas do ciclo.

**Objetivo:** minimização.



É NP-difícil Karp [1972]

Considere que  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  e  $n = |V(G)|$ .

- 1: **Função** MinhaPrimeiraAproximacao( $G, c$ )
- 2: Seja  $\mathcal{H} = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  qualquer sequência de  $V(G)$
- 3: **Devolve**  $\mathcal{H}$

Considere que  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  e  $n = |V(G)|$ .

- 1: **Função** MinhaPrimeiraAproximacao( $G, c$ )
- 2: Seja  $\mathcal{H} = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  qualquer sequência de  $V(G)$
- 3: **Devolve**  $\mathcal{H}$

$$c(\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_i v_{i+1}) + c(v_n v_1)$$

Considere que  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  e  $n = |V(G)|$ .

- 1: **Função** MinhaPrimeiraAproximacao( $G, c$ )
- 2: Seja  $\mathcal{H} = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  qualquer sequência de  $V(G)$
- 3: **Devolve**  $\mathcal{H}$

$$c(\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_i v_{i+1}) + c(v_n v_1) \leq 2n . \quad (1)$$

Considere que  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  e  $n = |V(G)|$ .

- 1: **Função** MinhaPrimeiraAproximacao( $G, c$ )
- 2: Seja  $\mathcal{H} = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  qualquer sequência de  $V(G)$
- 3: **Devolve**  $\mathcal{H}$

$$c(\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_i v_{i+1}) + c(v_n v_1) \leq 2n . \quad (1)$$

$$OPT(G, c) \geq n . \quad (2)$$

Considere que  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$  e  $n = |V(G)|$ .

- 1: **Função** MinhaPrimeiraAproximacao( $G, c$ )
- 2: Seja  $\mathcal{H} = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  qualquer sequência de  $V(G)$
- 3: **Devolve**  $\mathcal{H}$

$$c(\mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_i v_{i+1}) + c(v_n v_1) \leq 2n . \quad (1)$$

$$OPT(G, c) \geq n . \quad (2)$$

$$c(\mathcal{H}) \leq 2OPT(G, c) . \quad (3)$$

# Inaproximabilidade

---



## Teorema

Para qualquer  $\alpha > 1$ , não existe  $\alpha$ -aproximação para o TSP, a menos que  $P = NP$ .

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.
- **(1,2)-TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ .

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.
- **(1,2)-TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ .
- **TSP Euclidiano**: vértices em  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) e distância euclidiana.

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.
- **(1,2)-TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ .
- **TSP Euclidiano**: vértices em  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) e distância euclidiana.
- **TSP Assimétrico**: digrafo  $D$ ,  $c: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.
- **(1,2)-TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ .
- **TSP Euclidiano**: vértices em  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) e distância euclidiana.
- **TSP Assimétrico**: digrafo  $D$ ,  $c: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- **Path TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  desig. triang.,  $s, t \in V(G)$ .

- **TSP Métrico**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  satisfaz desigualdade triangular.
- **(1,2)-TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \{1, 2\}$ .
- **TSP Euclidiano**: vértices em  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^d$ ) e distância euclidiana.
- **TSP Assimétrico**: digrafo  $D$ ,  $c: E(D) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- **Path TSP**:  $G$  completo,  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  desig. triang.,  $s, t \in V(G)$ .
- **Graph TSP / Graphic TSP**:  $H$  conexo,  $w: \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

# Aproximação para o TSP Métrico

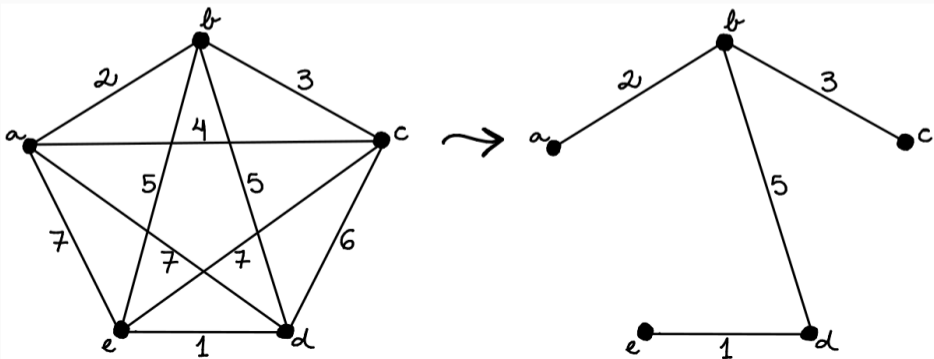
---



## (3/2)-aproximação

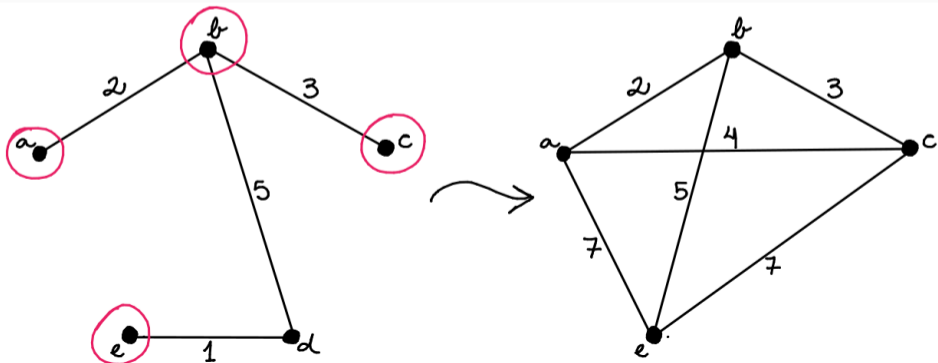
1: **Função** Christofides( $G, c$ )

2:  $T \leftarrow MST(G, c)$



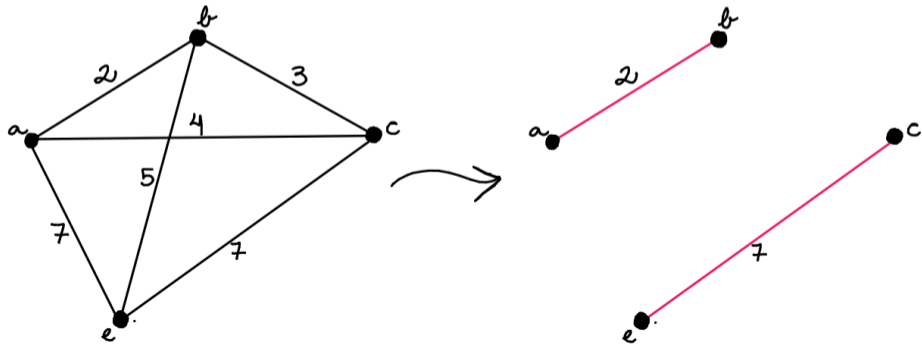
## (3/2)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{Christofides}(G, c)$
- 2:  $T \leftarrow \text{MST}(G, c)$
- 3:  $M \leftarrow$  emparelhamento mínimo perfeito nos vértices de grau ímpar de  $T$



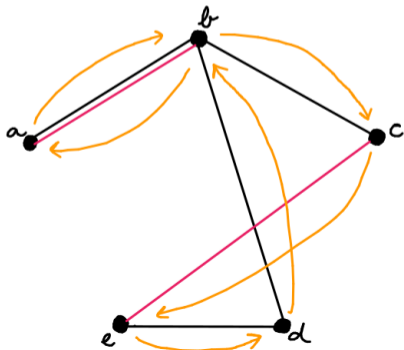
## (3/2)-aproximação

- 1: **Função** Christofides( $G, c$ )
- 2:  $T \leftarrow MST(G, c)$
- 3:  $M \leftarrow$  emparelhamento mínimo perfeito nos vértices de grau ímpar de  $T$



## (3/2)-aproximação

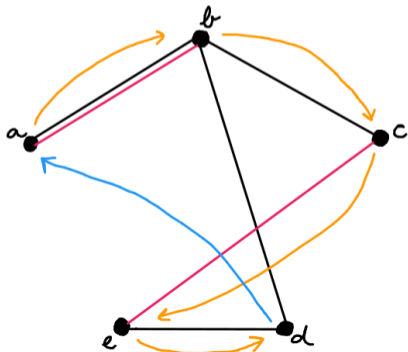
- 1: **Função**  $\text{Christofides}(G, c)$
- 2:  $T \leftarrow \text{MST}(G, c)$
- 3:  $M \leftarrow$  emparelhamento mínimo perfeito nos vértices de grau ímpar de  $T$
- 4:  $\mathcal{E} \leftarrow$  trilha Euleriana em  $T + M$



$(a, b, c, e, d, b, a)$

## (3/2)-aproximação

- 1: **Função** Christofides( $G, c$ )
- 2:  $T \leftarrow MST(G, c)$
- 3:  $M \leftarrow$  emparelhamento mínimo perfeito nos vértices de grau ímpar de  $T$
- 4:  $\mathcal{E} \leftarrow$  trilha Euleriana em  $T + M$
- 5:  $\mathcal{H} \leftarrow$  ciclo hamiltoniano obtido com short-cuts em  $\mathcal{E}$



$(a, b, c, e, d, \cancel{b}, a)$

$(a, b, c, e, d, a)$

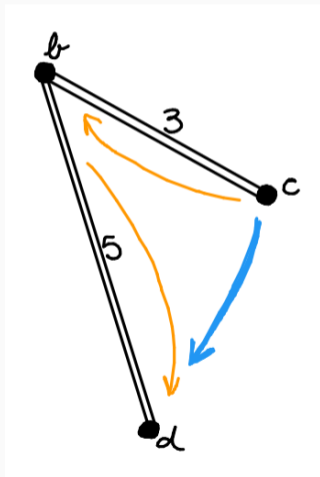
## (3/2)-aproximação

- 1: **Função** Christofides( $G, c$ )
- 2:  $T \leftarrow MST(G, c)$
- 3:  $M \leftarrow$  emparelhamento mínimo perfeito nos vértices de grau ímpar de  $T$
- 4:  $\mathcal{E} \leftarrow$  trilha Euleriana em  $T + M$
- 5:  $\mathcal{H} \leftarrow$  ciclo hamiltoniano obtido com short-cuts em  $\mathcal{E}$
- 6: **Devolve**  $\mathcal{H}$

Tempo polinomial!

$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E})$$

(4)

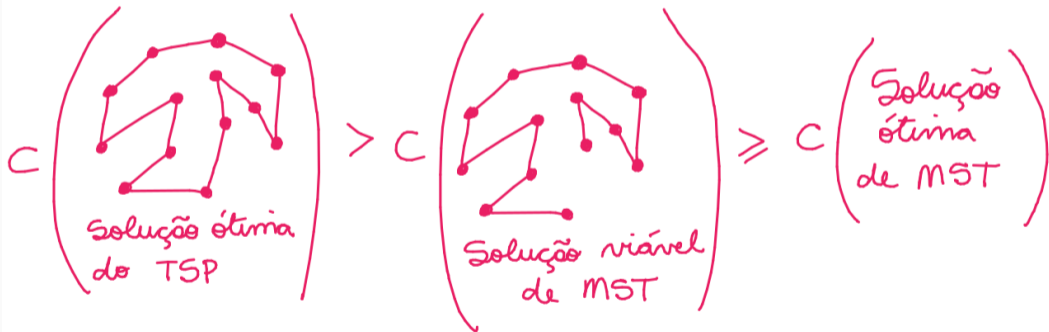


$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E}) = c(T) + c(M) \quad (4)$$



## (3/2)-aproximação

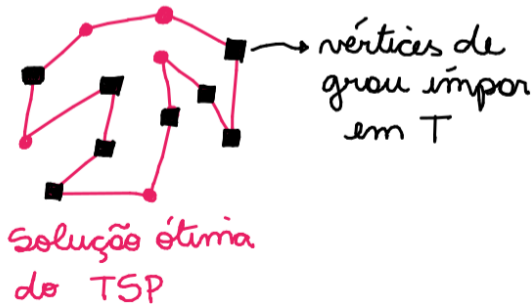
$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E}) = c(T) + c(M) \leq \text{OPT}(G, c) + c(M) . \quad (4)$$



## (3/2)-aproximação

$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E}) = c(T) + c(M) \leq OPT(G, c) + c(M) . \quad (4)$$

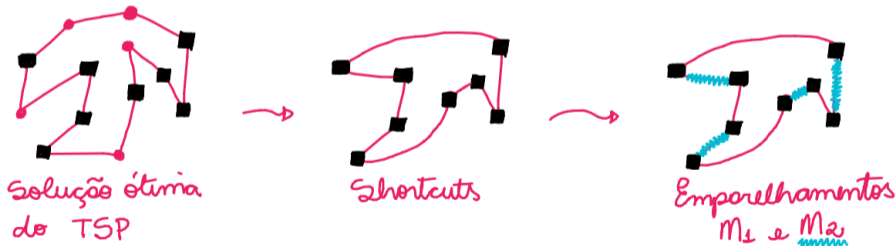
$$\frac{1}{2}OPT(G, c) \geq c(M) . \quad (5)$$



## (3/2)-aproximação

$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E}) = c(T) + c(M) \leq \text{OPT}(G, c) + c(M) . \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \text{OPT}(G, c) \geq c(M) . \quad (5)$$



$$\text{OPT}(G, c) \geq c(M_1) + c(M_2) \geq c(M) + c(M) = 2c(M)$$

$$c(\mathcal{H}) \leq c(\mathcal{E}) = c(T) + c(M) \leq OPT(G, c) + c(M) . \quad (4)$$

$$OPT(G, c) \geq \frac{1}{2}c(M) . \quad (5)$$

$$c(\mathcal{H}) \leq \frac{3}{2}OPT(G, c) . \quad (6)$$

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

- $\frac{3813}{3812} \approx 1,000262329$

- $\frac{220}{219} \approx 1,00862069$

- $\frac{185}{184} \approx 1,005434783$

- $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$

Engelbrecht [2003]

Böckenhauer and Seibert [2000]

Papadimitriou and Vempala [2006]

Lampis [2014]

Karpinski et al. [2015]

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{3813}{3812} \approx 1,000262329$

Böckenhauer and Seibert [2000]

- $\frac{220}{219} \approx 1,00862069$

Papadimitriou and Vempala [2006]

- $\frac{185}{184} \approx 1,005434783$

Lampis [2014]

- $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$

Karpinski et al. [2015]

- Aproximações:

- $\approx 1978: 2$

Vazirani [2001]

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{3813}{3812} \approx 1,000262329$

Böckenhauer and Seibert [2000]

- $\frac{220}{219} \approx 1,00862069$

Papadimitriou and Vempala [2006]

- $\frac{185}{184} \approx 1,005434783$

Lampis [2014]

- $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$

Karpinski et al. [2015]

- Aproximações:

- $\approx 1978: 2$

Vazirani [2001]

- 1976:  $\frac{3}{2} = 1,5$

Christofides [1976, 2022]

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{3813}{3812} \approx 1,000262329$

Böckenhauer and Seibert [2000]

- $\frac{220}{219} \approx 1,00862069$

Papadimitriou and Vempala [2006]

- $\frac{185}{184} \approx 1,005434783$

Lampis [2014]

- $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$

Karpinski et al. [2015]

- Aproximações:

- $\approx 1978: 2$

Vazirani [2001]

- 1976:  $\frac{3}{2} = 1,5$

Christofides [1976, 2022]

- 2021:  $\frac{3}{2} - \epsilon$  aleatorizada

Karlin et al. [2021]



- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{3813}{3812} \approx 1,000262329$

Böckenhauer and Seibert [2000]

- $\frac{220}{219} \approx 1,00862069$

Papadimitriou and Vempala [2006]

- $\frac{185}{184} \approx 1,005434783$

Lampis [2014]

- $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$

Karpinski et al. [2015]

- Aproximações:

- $\approx 1978: 2$

Vazirani [2001]

- 1976:  $\frac{3}{2} = 1,5$

Christofides [1976, 2022]

- 2021:  $\frac{3}{2} - \epsilon$  aleatorizada

Karlin et al. [2021]

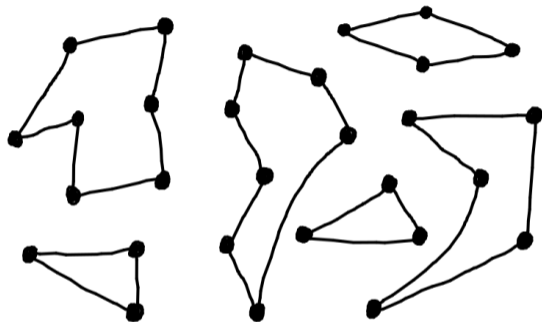
- 2023:  $\frac{3}{2} - \epsilon$

Karlin et al. [2023]

## Aproximações para o (1,2)-TSP

---

## Observações sobre 2-fatores

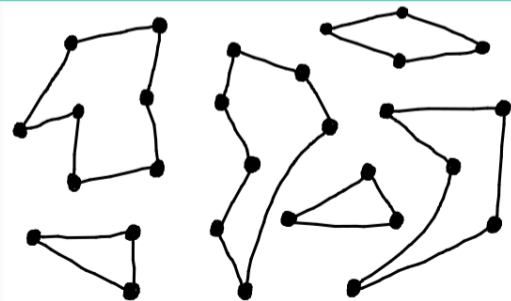


→ Todo ciclo hamiltoniano é um 2-fator

$$\Rightarrow \text{OPT}_{\text{TSP}} \geq \text{OPT}_{\text{min-2-FAT}}$$

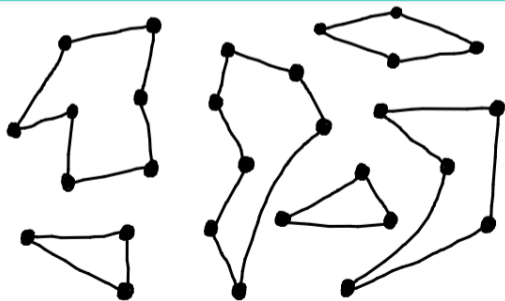
## (5/3)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Factor}(G, c)$



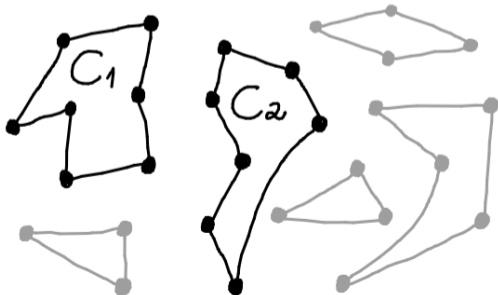
## (5/3)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  faça



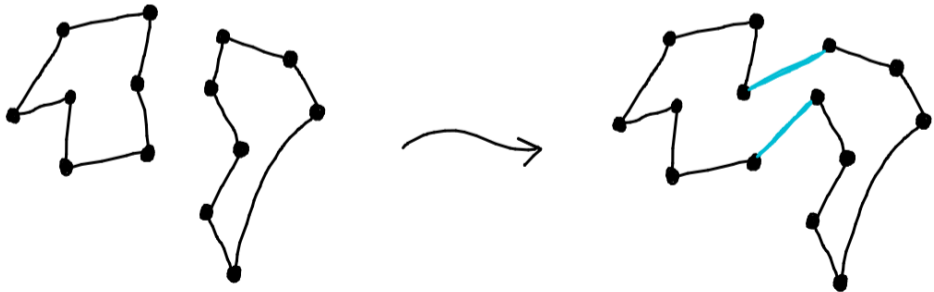
## (5/3)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  faça
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$



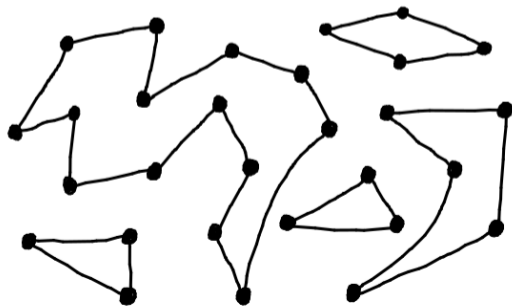
## (5/3)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  faça
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$
- 5:     una  $C_1$  e  $C_2$  em um único ciclo  $C$



## (5/3)-aproximação

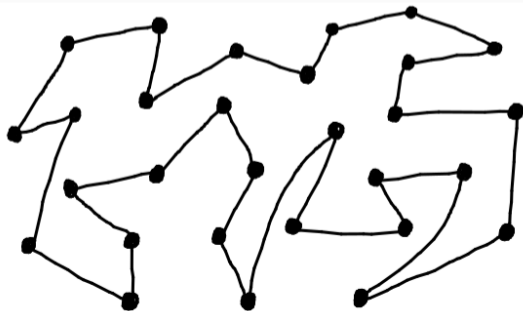
- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  faça
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$
- 5:     una  $C_1$  e  $C_2$  em um único ciclo  $C$
- 6:      $F \leftarrow F \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C\}$





## (5/3)-aproximação

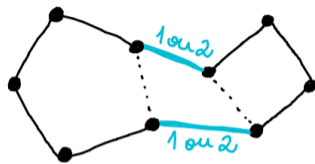
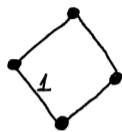
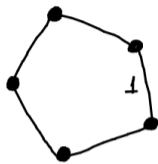
- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  faça
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$
- 5:     una  $C_1$  e  $C_2$  em um único ciclo  $C$
- 6:      $F \leftarrow F \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C\}$
- 7: **Devolve** o ciclo  $H$  existente em  $F$



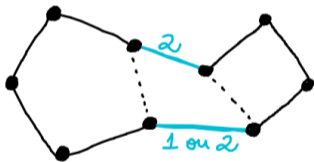
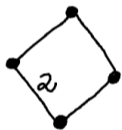
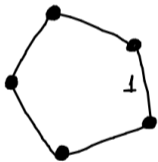
- 1: **Função**  $\text{TourPatching}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  **faça**
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$
- 5:     una  $C_1$  e  $C_2$  em um único ciclo  $C$
- 6:      $F \leftarrow F \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C\}$
- 7: **Devolve** o ciclo  $H$  existente em  $F$

Tempo polinomial!

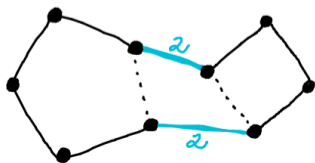
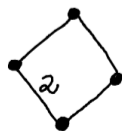
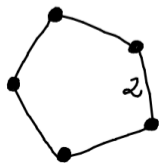
# União de ciclos de 2-fatores



+ ④  
+ 1  
+ 2



+ ④  
+ 1



+ ④

$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + 2\frac{n}{3} \quad (7)$$

Porque  $F$  tem no máximo  $n/3$  ciclos (triângulos).

$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + 2\frac{n}{3} \leq c(F) + 2\frac{OPT(G, c)}{3} . \quad (7)$$

*Porque  $n \leq OPT(G, c)$ .*

$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + 2\frac{n}{3} \leq c(F) + 2\frac{OPT(G, c)}{3} . \quad (7)$$

$$OPT(G, c) \geq c(F) . \quad (8)$$

$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + 2\frac{n}{3} \leq c(F) + 2\frac{OPT(G, c)}{3} . \quad (7)$$

$$OPT(G, c) \geq c(F) . \quad (8)$$

$$c(\mathcal{H}) \leq \frac{5}{3}OPT(G, c) . \quad (9)$$

$$\frac{5}{3} \approx 1,667$$

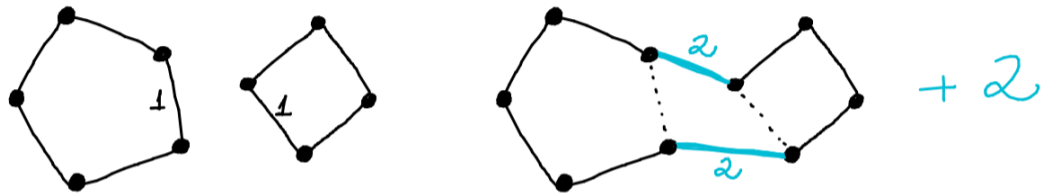
1: **Função**  $\text{TourPatchingGreedy}(G, c)$

2:  $F \leftarrow \text{Min2Factor}(G, c)$



- 1: **Função**  $\text{TourPatchingGreedy}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3: **Enquanto** há mais de um ciclo em  $F$  **faça**
- 4:     sejam  $C_1, C_2 \in F$  **escolhidos com preferência: ciclos com 2-aresta primeiro**
- 5:     una  $C_1$  e  $C_2$  em um único ciclo  $C$  **(pelas 2-arestas, se houver)**
- 6:      $F \leftarrow F \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C\}$
- 7: **Devolve** o ciclo  $\mathcal{H}$  existente em  $F$

## União de ciclos de 2-fatores



Se há acréscimo de 2 no custo,  
haverá arestas de peso 2 !!!

$$\begin{aligned}c(\mathcal{H}) &\leq c(F) + \frac{n}{3} \\ &\leq OPT(G, c) + \frac{OPT(G, c)}{3} \\ &= \frac{4}{3}OPT(G, c) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c(\mathcal{H}) &\leq c(F) + \frac{n}{3} \\ &\leq OPT(G, c) + \frac{OPT(G, c)}{3} \\ &= \frac{4}{3}OPT(G, c) .\end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \approx 1,333$$

Se todos os ciclos inicialmente têm ao menos 4 vértices ...

$$\begin{aligned}c(\mathcal{H}) &\leq c(F) + \frac{n}{4} \\ &\leq OPT(G, c) + \frac{OPT(G, c)}{4} \\ &= \frac{5}{4}OPT(G, c) .\end{aligned}$$

$$\frac{5}{4} = 1,25$$

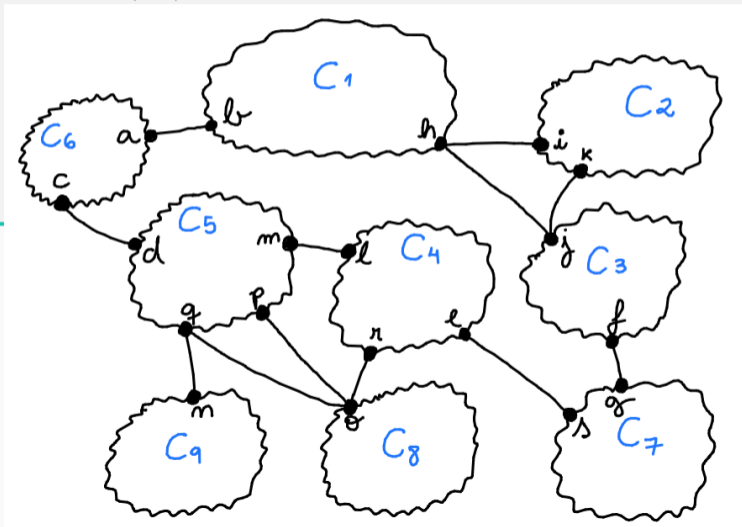
**BRACE YOURSELVES**



## (11/9)-aproximação

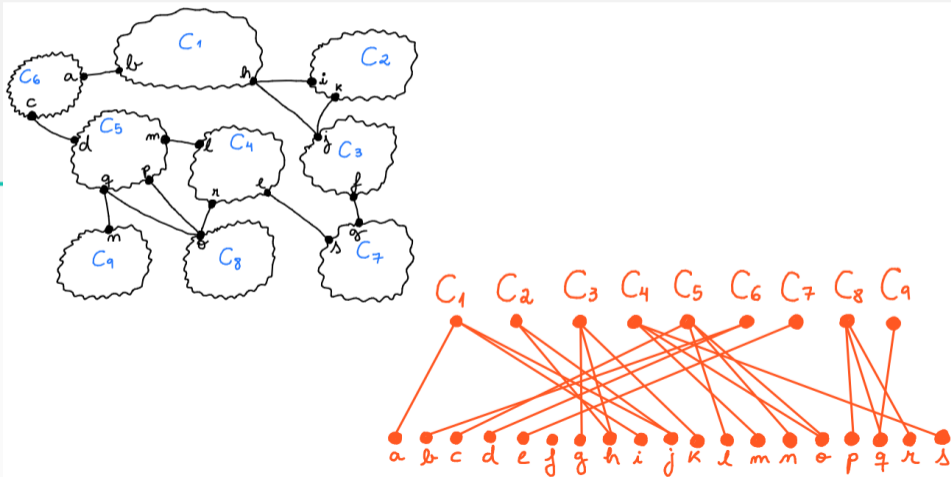
1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$

2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$



# (11/9)-aproximação

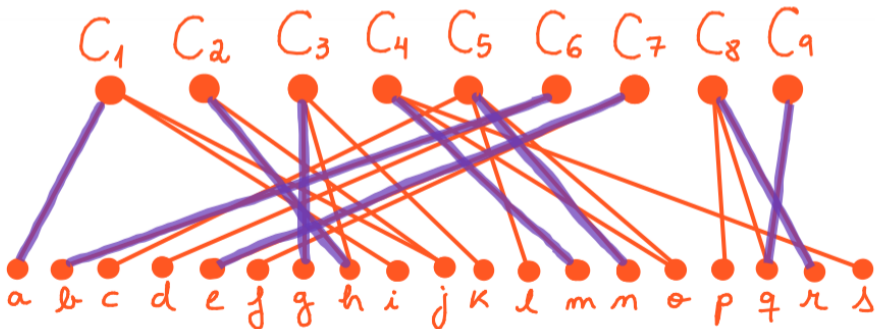
- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Factor}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$





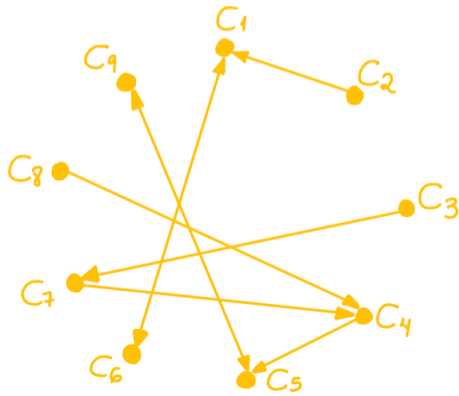
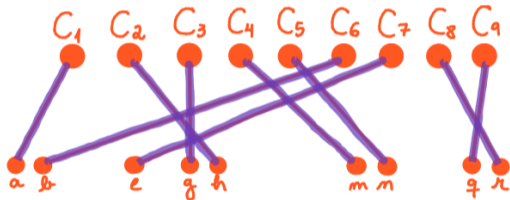
## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$



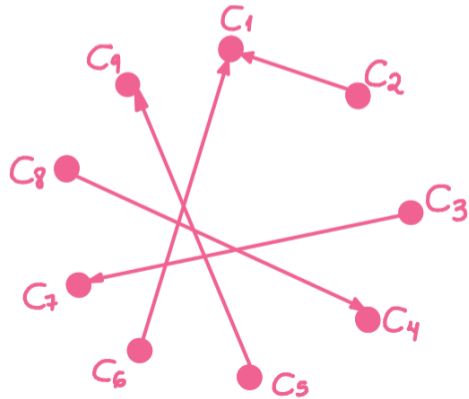
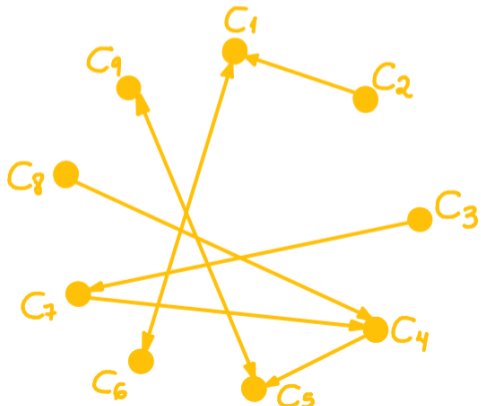
## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$



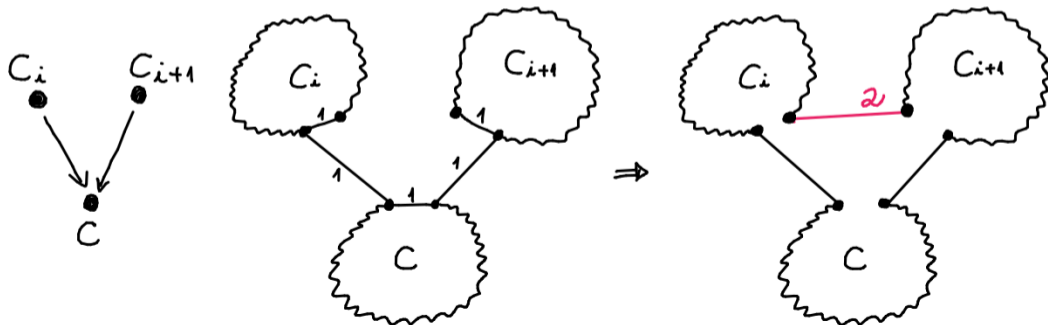
## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$
- 6:  $D' \leftarrow$  subdigrafo de  $D$  com in-trees e  $P_3$ 's



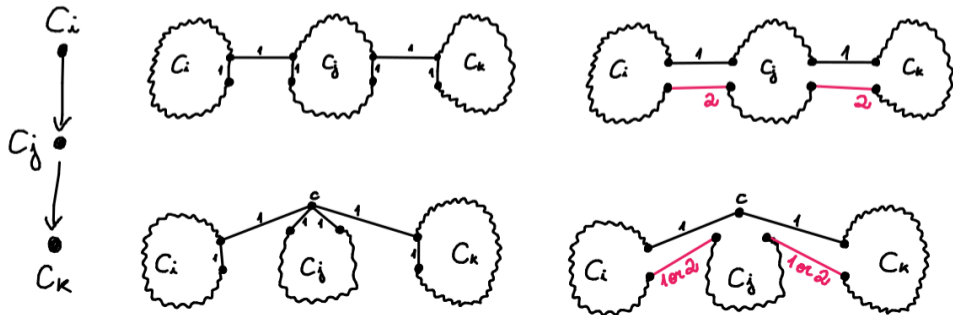
## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$
- 6:  $D' \leftarrow$  subdigrafo de  $D$  com in-trees e  $P_3$ 's
- 7:  $F' \leftarrow$  união de ciclos de  $F$  de acordo com  $D'$



# (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Fator}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$
- 6:  $D' \leftarrow$  subdigrafo de  $D$  com in-trees e  $P_3$ 's
- 7:  $F' \leftarrow$  união de ciclos de  $F$  de acordo com  $D'$
- 8:  $F'' \leftarrow$  união de ciclos restantes



## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Factor}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$
- 6:  $D' \leftarrow$  subdigrafo de  $D$  com in-trees e  $P_3$ 's
- 7:  $F' \leftarrow$  união de ciclos de  $F$  de acordo com  $D'$
- 8:  $F'' \leftarrow$  união de ciclos restantes
- 9: **Devolve** o ciclo  $\mathcal{H}$  existente em  $F''$

## (11/9)-aproximação

- 1: **Função**  $\text{TourPatching2.0}(G, c)$
- 2:  $F \leftarrow \text{Min2Factor}(G, c)$
- 3:  $B \leftarrow$  grafo bipartido em  $V(F), V(G)$
- 4:  $M \leftarrow$  emparelhamento máximo em  $B$
- 5:  $D \leftarrow$  digrafo com  $V(D) = V(F)$  e arcos de acordo com  $M$
- 6:  $D' \leftarrow$  subdigrafo de  $D$  com in-trees e  $P_3$ 's
- 7:  $F' \leftarrow$  união de ciclos de  $F$  de acordo com  $D'$
- 8:  $F'' \leftarrow$  união de ciclos restantes
- 9: **Devolve** o ciclo  $\mathcal{H}$  existente em  $F''$

Tempo polinomial!

$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + \text{custo atribuído a cada vértice pela união} \quad (10)$$

$$\leq OPT(G, c) + \frac{2}{9}n \quad (11)$$

$$\leq OPT(G, c) + \frac{2}{9}OPT(G, c) \quad (12)$$

$$= \frac{11}{9}OPT(G, c) . \quad (13)$$

$$\frac{11}{9} \approx 1,222$$



$$c(\mathcal{H}) \leq c(F) + \text{custo atribuído a cada vértice pela união} \quad (10)$$

$$\leq OPT(G, c) + \frac{2}{9}n \quad (11)$$

$$\leq OPT(G, c) + \frac{2}{9}OPT(G, c) \quad (12)$$

$$= \frac{11}{9}OPT(G, c) . \quad (13)$$

$$\frac{11}{9} \approx 1,222$$

E se  $F$  não tem triângulos,  $c(\mathcal{H}) \leq \frac{7}{6}OPT(G, c)$ .

$$\frac{7}{6} \approx 1,1667$$

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

- $\frac{741}{740} \approx 1,001351351$

- $\frac{535}{534} \approx 1,001872659$

Engelbrecht [2003]

Engelbrecht and Karpinski [2006]

Karpinski and Schmied [2012]

## (1,2)-TSP: the road so far

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{741}{740} \approx 1,001351351$

Engelbrecht and Karpinski [2006]

- $\frac{535}{534} \approx 1,001872659$

Karpinski and Schmied [2012]

- Aproximações:

- 1989:  $\frac{7}{6} \approx 1,166666667$

Papadimitriou and Yannakakis [1993]

## (1,2)-TSP: the road so far

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{741}{740} \approx 1,001351351$

Engelbrecht and Karpinski [2006]

- $\frac{535}{534} \approx 1,001872659$

Karpinski and Schmied [2012]

- Aproximações:

- 1989:  $\frac{7}{6} \approx 1,166666667$

Papadimitriou and Yannakakis [1993]

- 2005:  $\frac{65}{56} \approx 1,160714286$

Bläser and Ram [2005]

## (1,2)-TSP: the road so far

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{741}{740} \approx 1,001351351$

Engelbrecht and Karpinski [2006]

- $\frac{535}{534} \approx 1,001872659$

Karpinski and Schmied [2012]

- Aproximações:

- 1989:  $\frac{7}{6} \approx 1,166666667$

Papadimitriou and Yannakakis [1993]

- 2005:  $\frac{65}{56} \approx 1,160714286$

Bläser and Ram [2005]

- 2006:  $\frac{8}{7} \approx 1,142857143, O(n^9)$

Berman and Karpinski [2006]

## (1,2)-TSP: the road so far

- Inaproximabilidade:

- $\frac{5381}{5380} \approx 1,000185874$

Engelbrecht [2003]

- $\frac{741}{740} \approx 1,001351351$

Engelbrecht and Karpinski [2006]

- $\frac{535}{534} \approx 1,001872659$

Karpinski and Schmied [2012]

- Aproximações:

- 1989:  $\frac{7}{6} \approx 1,166666667$

Papadimitriou and Yannakakis [1993]

- 2005:  $\frac{65}{56} \approx 1,160714286$

Bläser and Ram [2005]

- 2006:  $\frac{8}{7} \approx 1,142857143, O(n^9)$

Berman and Karpinski [2006]

- 2018:  $\frac{8}{7}$ , em tempo  $O(n^3)$

Adamaszek et al. [2018]

## Resultados para outras variações

---

- TSP Euclideano
  - 1998: PTAS

Arora [1998]



- TSP Euclideano

- 1998: PTAS

Arora [1998]

- TSP Assimétrico

- 1982:  $O(\log n)$ -aproximação
- 2014:  $O(\log n / \log(\log n))$ -aproximação
- 2020: 506-aproximação
- 2022:  $(22 + \epsilon)$ -aproximação
- 2013: Inaproximabilidade  $\frac{75}{74} \approx 1,013513514$

Frieze et al. [1982]

Asadpour et al. [2017]

Svensson et al. [2020]

Traub and Vygen [2022]

Karpinski et al. [2015]

- Path TSP

- 1991:  $\frac{5}{3} \approx 1,667$  Hoogeveen [1991]
- 2012:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  An et al. [2015]
- 2013:  $\frac{8}{5} = 1,6$  Sebő [2013]
- 2016: 1,599 Vygen [2016]
- 2016: 1,566 Gottschalk and Vygen [2018]
- 2016: 1,53 Sebő and van Zuylen [2016]
- 2019:  $1,5 + \epsilon$  Traub and Vygen [2019]
- 2019: 1,5 Zenklusen [2019]
- 2013: Inaproximabilidade  $\frac{123}{122} \approx 1,008196721$  Karpinski et al. [2015]

## Alguns trabalhos meus mais recentes relacionados

---

# Steiner Multicycle Problem

**Entrada:** Grafo completo  $G$ , função  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  que respeita desigualdade triangular e coleção  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$  de conjuntos (disjuntos) de terminais.

**Solução viável:** 2-fator em  $G$  que **respeita**  $\mathcal{T}$ .

**Função objetivo:** soma dos custos das arestas dos ciclos.

**Objetivo:** minimização.



$$\mathcal{T} = \left\{ \{*, *, *, *\}, \{\square, \square\}, \{\circ, \circ\}, \{\triangle, \triangle, \triangle\}, \{\heartsuit, \heartsuit, \heartsuit\}, \{+, +\} \right\}$$

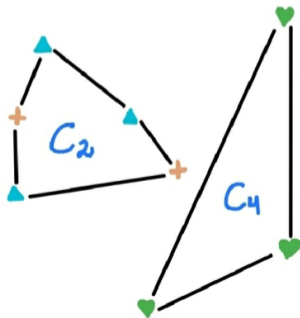
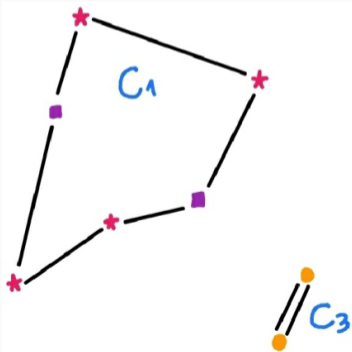
# Steiner Multicycle Problem

**Entrada:** Grafo completo  $G$ , função  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  que respeita desigualdade triangular e coleção  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$  de conjuntos (disjuntos) de terminais.

**Solução viável:** 2-fator em  $G$  que **respeita**  $\mathcal{T}$ .

**Função objetivo:** soma dos custos das arestas dos ciclos.

**Objetivo:** minimização.



$$\mathcal{T} = \left\{ \{ \star, \star, \star, \star \}, \{ \blacksquare, \blacksquare \}, \{ \bullet, \bullet \}, \{ \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle \}, \{ \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit \}, \{ +, + \} \right\}$$

# Steiner Multicycle Problem

**Entrada:** Grafo completo  $G$ , função  $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  que respeita desigualdade triangular e coleção  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(V(G))$  de conjuntos (disjuntos) de terminais.

**Solução viável:** 2-fator em  $G$  que **respeita**  $\mathcal{T}$ .

**Função objetivo:** soma dos custos das arestas dos ciclos.

**Objetivo:** minimização.

- Generalização do TSP
- 4-aproximação Pereira et al. [2018]
- Esquema de aproximação aleatorizado para o Euclideano Lintzmayer et al. [2020]
- 3-aproximação Fernandes et al. [2022]
- $\frac{11}{9}$ -aproximação para o caso (1,2) Fernandes et al. [2022]
- $O(\log n)$ -aproximação para o caso assimétrico Fernandes et al. [2022]

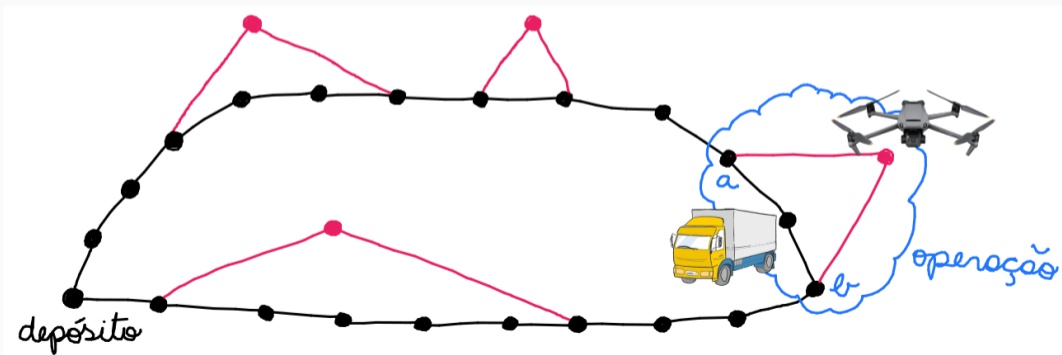
# Flying Sidekick TSP (TSP com Drones)

**Entrada:** Grafo completo  $G$ , função  $c_T: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $c_D: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Solução viável:** rota para o caminhão com lançamentos do drone: sequência de operações  $((r_1, d_1), (r_2, d_2), \dots, (r_h, d_h))$ .

**Função objetivo:** soma dos custos dos tempos das operações:  $\sum_{\ell=1}^h \max\{t(r_\ell), t(d_\ell)\}$ .

**Objetivo:** minimização.



## Flying Sidekick TSP (TSP com Drones)

**Entrada:** Grafo completo  $G$ , função  $c_T: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  e  $c_D: E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

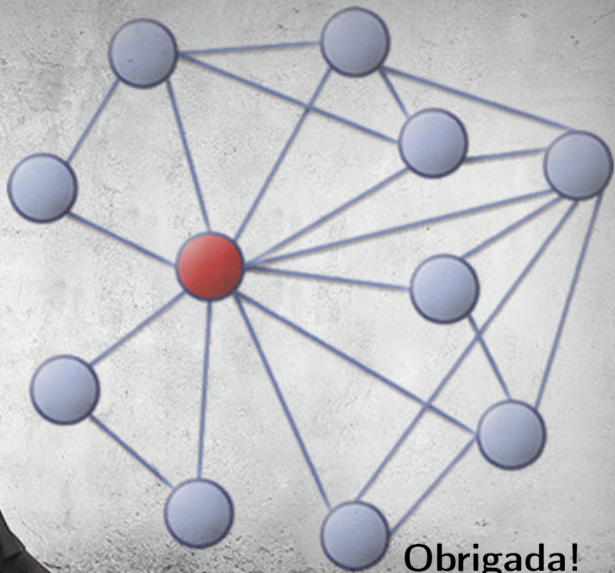
**Solução viável:** rota para o caminhão com lançamentos do drone: sequência de operações  $((r_1, d_1), (r_2, d_2), \dots, (r_h, d_h))$ .

**Função objetivo:** soma dos custos dos tempos das operações:  $\sum_{\ell=1}^h \max\{t(r_\ell), t(d_\ell)\}$ .

**Objetivo:** minimização.

- Generalização do TSP
- Vários algoritmos exatos e heurísticas/metaheurísticas





Obrigada!

## References

---

- [1] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N.Y., 1972)*, pages 85–103. Plenum, New York, 1972.
- [2] Lars Engebretsen. An explicit lower bound for TSP with distances one and two. *Algorithmica*, 35(4):301–319, 2003. ISSN 0178-4617. doi:[10.1007/s00453-002-1001-6](https://doi.org/10.1007/s00453-002-1001-6).
- [3] Hans-Joachim Böckenhauer and Sebastian Seibert. Improved lower bounds on the approximability of the traveling salesman problem. *Theoretical Informatics and Applications*, 34(3):213–255, 2000. ISSN 0988-3754. doi:[10.1051/ita:2000115](https://doi.org/10.1051/ita:2000115).
- [4] Christos H. Papadimitriou and Santosh Vempala. On the approximability of the traveling salesman problem. *Combinatorica*, 26(1):101–120, 2006. doi:[10.1007/s00493-006-0008-z](https://doi.org/10.1007/s00493-006-0008-z).
- [5] Michael Lampis. Improved inapproximability for TSP. *Theory of Computing*, 10:217–236, 2014. doi:[10.4086/toc.2014.v010a009](https://doi.org/10.4086/toc.2014.v010a009).
- [6] Marek Karpinski, Michael Lampis, and Richard Schmied. New inapproximability bounds for TSP. *Journal of Computer and System Sciences*, 81(8):1665–1677, 2015. doi:[10.1016/j.jcss.2015.06.003](https://doi.org/10.1016/j.jcss.2015.06.003).

- [7] Vijay V. Vazirani. *Approximation algorithms*. Springer, 2001. ISBN 9783540653677.
- [8] Nicos Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical report, Carnegie-Mellon University. Pittsburgh, Pennsylvania. Management Sciences Research Group, 1976.
- [9] Nicos Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. *Operations Research Forum*, 3(1):Paper No. 20, 4, 2022. doi:[10.1007/s43069-021-00101-z](https://doi.org/10.1007/s43069-021-00101-z).
- [10] Anna R. Karlin, Nathan Klein, and Shayan Oveis Gharan. A (slightly) improved approximation algorithm for metric TSP. In *STOC '21—Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 32–45. ACM, New York, 2021. doi:[10.1145/3406325.3451009](https://doi.org/10.1145/3406325.3451009).
- [11] Anna R. Karlin, Nathan Klein, and Shayan Oveis Gharan. A Deterministic Better-than-3/2 Approximation Algorithm for Metric TSP. In Alberto Del Pia and Volker Kaibel, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, pages 261–274, Cham, 2023. Springer International Publishing. doi:[10.1007/978-3-031-32726-1\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-031-32726-1_19).
- [12] Lars Engebretsen and Marek Karpinski. TSP with bounded metrics. *Journal of Computer and System Sciences*, 72(4):509–546, 2006. doi:[10.1016/j.jcss.2005.12.001](https://doi.org/10.1016/j.jcss.2005.12.001).
- [13] Marek Karpinski and Richard Schmieid. On Approximation Lower Bounds for TSP with Bounded Metrics, 2012.
- [14] Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research*, 18(1):1–11, 1993. ISSN 0364-765X. doi:[10.1287/moor.18.1.1](https://doi.org/10.1287/moor.18.1.1).

- [15] M. Bläser and L. Shankar Ram. An improved approximation algorithm for TSP with distances one and two. In *Fundamentals of computation theory*, volume 3623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 504–515. Springer, Berlin, 2005. doi:[10.1007/11537311\\_44](https://doi.org/10.1007/11537311_44).
- [16] Piotr Berman and Marek Karpinski.  $8/7$ -approximation algorithm for  $(1, 2)$ -TSP. In *Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 641–648. ACM, New York, 2006. doi:[10.1145/1109557.1109627](https://doi.org/10.1145/1109557.1109627).
- [17] Anna Adamaszek, Matthias Mnich, and Katarzyna Paluch. New approximation algorithms for  $(1, 2)$ -TSP. In *45th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, volume 107 of *LIPICs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, page 14. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2018. doi:[10.4230/LIPICs.ICALP.2018.9](https://doi.org/10.4230/LIPICs.ICALP.2018.9).
- [18] Sanjeev Arora. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM*, 45(5):753–782, 1998. doi:[10.1145/290179.290180](https://doi.org/10.1145/290179.290180).
- [19] A. M. Frieze, G. Galbiati, and F. Maffioli. On the worst-case performance of some algorithms for the asymmetric traveling salesman problem. *Networks. An International Journal*, 12(1):23–39, 1982. doi:[10.1002/net.3230120103](https://doi.org/10.1002/net.3230120103).
- [20] Arash Asadpour, Michel X. Goemans, Aleksander Młodny, Shayan Oveis Gharan, and Amin Saberi. An  $o(\log n / \log \log n)$ -approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *Operations Research*, 65(4):1043–1061, 2017.
- [21] Ola Svensson, Jakub Tarnawski, and László A. Végh. A constant-factor approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *Journal of the ACM*, 67(6):Art. 37, 53, 2020. doi:[10.1145/3424306](https://doi.org/10.1145/3424306).

- [22] Vera Traub and Jens Vygen. An improved approximation algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. *SIAM Journal on Computing*, 51(1):139–173, 2022. doi:[10.1137/20M1339313](https://doi.org/10.1137/20M1339313).
- [23] J. A. Hoogeveen. Analysis of Christofides' heuristic: some paths are more difficult than cycles. *Operations Research Letters*, 10(5):291–295, 1991. ISSN 0167-6377. doi:[10.1016/0167-6377\(91\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0167-6377(91)90016-1).
- [24] Hyung-Chan An, Robert Kleinberg, and David B. Shmoys. Improving Christofides' algorithm for the s-t path TSP. *Journal of the ACM*, 62(5):28, 2015. ISSN 0004-5411. doi:[10.1145/2818310](https://doi.org/10.1145/2818310).
- [25] András Sebő. Eight-fifth approximation for the path TSP. In *Integer programming and combinatorial optimization*, volume 7801 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 362–374. Springer, Heidelberg, 2013. doi:[10.1007/978-3-642-36694-9\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-642-36694-9_31).
- [26] Jens Vygen. Reassembling trees for the traveling salesman. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30(2):875–894, 2016. ISSN 0895-4801. doi:[10.1137/15M1010531](https://doi.org/10.1137/15M1010531).
- [27] Corinna Gottschalk and Jens Vygen. Better  $s - t$ -tours by Gao trees. *Mathematical Programming*, 172(1-2, Ser. B): 191–207, 2018. doi:[10.1007/s10107-017-1202-z](https://doi.org/10.1007/s10107-017-1202-z).
- [28] András Sebő and Anke van Zuylen. The salesman's improved paths: a  $3/2 + 1/34$  approximation. In *57th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2016*, pages 118–127. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2016. doi:[10.1109/FOCS.2016.21](https://doi.org/10.1109/FOCS.2016.21).
- [29] Vera Traub and Jens Vygen. Approaching  $\frac{3}{2}$  for the  $s$ - $t$ -path TSP. *Journal of the ACM*, 66(2):17, 2019. doi:[10.1145/3309715](https://doi.org/10.1145/3309715).

- [30] Rico Zenklusen. A 1.5-approximation for path TSP. In *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1539–1549. SIAM, Philadelphia, PA, 2019. doi:[10.1137/1.9781611975482.93](https://doi.org/10.1137/1.9781611975482.93).
- [31] Vinicius N. G. Pereira, Mário César San Felice, Pedro Henrique D. B. Hokama, and Eduardo C. Xavier. The Steiner multi cycle problem with applications to a collaborative truckload problem. In *17th Symposium on Experimental Algorithms*, volume 103 of *LIPICs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, page 13. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2018. doi:[10.4230/LIPICs.SEA.2018.26](https://doi.org/10.4230/LIPICs.SEA.2018.26).
- [32] Carla N. Lintzmayer, Flávio K. Miyazawa, Phablo F. S. Moura, and Eduardo C. Xavier. Randomized approximation scheme for Steiner multi cycle in the Euclidean plane. *Theoretical Computer Science*, 835:134–155, 2020. ISSN 0304-3975. doi:[10.1016/j.tcs.2020.06.022](https://doi.org/10.1016/j.tcs.2020.06.022).
- [33] Cristina G. Fernandes, Carla N. Lintzmayer, and Phablo F. S. Moura. Approximations for the Steiner multicycle problem. In *LATIN 2022: Theoretical informatics*, volume 13568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 188–203. Springer, Cham, 2022. doi:[10.1007/978-3-031-20624-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-20624-5_12).