



Plano de trabalho

Pesquisador Responsável: **Maycon Sambinelli**

Título: **Decomposição em árvores de grau limitado**

1. DESCRIÇÃO DO PLANO

Uma *decomposição* de um grafo G é uma coleção $\{H_1, H_2, \dots, H_\ell\}$ de subgrafos de G tal que $\{E(H_1), E(H_2), \dots, E(H_\ell)\}$ é uma partição de $E(G)$. Uma decomposição \mathcal{D} é uma *decomposição em caminhos* se todo $H_i \in \mathcal{D}$ é um caminho. Uma decomposição em caminhos \mathcal{D} de um grafo G é *mínima* se, para toda decomposição em caminhos \mathcal{D}' de G , temos que $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{D}'|$. A cardinalidade de uma decomposição em caminhos mínima é chamada de *número de caminho (path number)* e é denotada por $\text{pn}(G)$. Erdős (veja [7]) questionou qual seria a menor quantidade de caminhos necessários para se decompor qualquer grafo. Em uma tentativa de responder esta pergunta, Gallai apresentou a seguinte conjectura (veja [7, 2]).

Conjectura 1 (Gallai, 1968). *Se G é um grafo conexo com n vértices, então $\text{pn}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Essa conjectura foi verificada para diversos casos particulares [7, 8, 6, 3, 1, 4], mas o caso geral permanece em aberto.

Dizemos que uma decomposição \mathcal{D} é uma *decomposição em árvores* se todo $H \in \mathcal{D}$ é uma árvore. Chung [5] demonstrou o seguinte resultado.

Teorema 1 (Chung, 78). *Todo grafo simples com n vértices admite uma decomposição em no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ árvores.*

Note que todo caminho é uma árvore. Logo, esse resultado é um enfraquecimento da Conjectura 1. Note ainda que podemos pensar em um caminho como sendo uma árvore na qual o grau máximo é no máximo 2.

Nesse trabalho de mestrado propomos investigar a seguinte pergunta.

Pergunta 1. *Para todo grafo conexo com n vértices, existe uma decomposição em árvores \mathcal{D} de G tal que $|\mathcal{D}| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e cada árvore $T \in \mathcal{D}$ tem grau máximo no máximo 3?*

A seguinte pergunta seria um enfraquecimento da anterior, e portanto um bom ponto de partida para o desenvolvimento deste projeto.

Pergunta 2. *Para todo grafo conexo com n vértices, existe uma decomposição em árvores \mathcal{D} de G tal que $|\mathcal{D}| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e cada árvore $T \in \mathcal{D}$ tem grau máximo limitado superiormente por uma constante c ?*

REFERÊNCIAS

- [1] Marthe Bonamy and Thomas J. Perrett. Gallai’s path decomposition conjecture for graphs of small maximum degree. *Discrete Math.*, 342(5):1293–1299, 2019.
- [2] Adrian Bondy. Beautiful conjectures in graph theory. *European J. Combin.*, 37:4–23, 2014.
- [3] Fábio Botler and Maycon Sambinelli. Towards Gallai’s path decomposition conjecture. *J. Graph Theory*, 97(1):161–184, 2021.
- [4] Fábio Botler, Maycon Sambinelli, Rafael S. Coelho, and Orlando Lee. Gallai’s path decomposition conjecture for graphs with treewidth at most 3. *Journal of Graph Theory*, 93(3):328–349, 2020.
- [5] F. R. K. Chung. On partitions of graphs into trees. *Discrete Math.*, 23(1):23–30, 1978.
- [6] Genghua Fan. Path decompositions and Gallai’s conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 93(2):117–125, 2005.
- [7] L. Lovász. On covering of graphs. In *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pages 231–236. Academic Press, New York, 1968.
- [8] L. Pyber. Covering the edges of a connected graph by paths. *J. Combin. Theory Ser. B*, 66(1):152–159, 1996.